PRELIMINARI GEOMETRICI PER QUESTIONI TECNICHE RELATIVE A CAVI.

* * *

I - IL CASO DEL CAVO DIRITTO.

1 - Problema A) - E' dato un cavo misto, costituito da anime in rame e moduli ottici, avvolti ad elica; tale cavo misto viene schematizzato con un cilindro. Si fa l'ipotesi che il cilindro si allunghi, per esempio per trazione o per dilatazione termica, o per altre cause, con un coefficiente di allungamento indicato con αc. Si suppone che il modulo ottico sia stato reso in qualche modo solidale col cilindro, e si vuole valutare il coefficiente di allungamento del modulo ottico.

AVVERTENZE. I) D'ora innanzi il simbolo αc del coefficiente di allungamento del cilidro sarà considerato nei calcoli come un tutto unico: quindi scriveremo per esempio " αc^2 " per indicare "$[\alpha c]^2$".
II) D'ora innanzi la funzione "radice quadrata" sarà indicata con l'esponente "$\frac{1}{2}$", per poter applicare comodamente la sviluppo con la formula di Mac Laurin.

2 - Si suppone che il modulo ottico sia relativamente sottile, ed a sezione circolare, e possa quindi essere schematizzato con un filo, avvolto ad elica sul cilindro; indichiamo con r la distanza del punto generico del filo dall'asse del cilindro.

Consideriamo una superficie cilindrica (a sezione) circolare, di raggio r, sulla quale è tracciata un'elica di passo p (Fig.1). Poichè la superficie cilindrica è sviluppabile su di un piano, d'ora innanzi le considerazioni geometriche verranno svolte ed i calcoli saranno eseguiti immaginando la superficie cilindrica già adagiata su di un piano.

Indichiamo con q la lunghezza del segmento di elica compreso tra due punti appartenenti alla medesima generatrice del cilindro. Nella immagine piana il valore di q può essere calcolato come la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti hanno come misure il passo p e la la lunghezza $a = 2 \cdot \pi \cdot r$ della circonferenza di base del cilindro (Fig.2). Si avrà quindi:

(1) $$q = \{p^2 + a^2\}^{1/2}.$$

Supponiamo ora che il cilindro si allunghi, e quindi il passo dell'elica, per effetto dell'allungamento, diventi:

(2) $$p' = p \cdot (1 + \alpha c).$$

Conseguentemente q prenderà il valore:

(3) $$q' = \{a^2+p^2\cdot(1+\alpha c)^2\}^{1/2} = \{a^2+p^2+ 2\cdot p^2\cdot\alpha c+ p^2\cdot\alpha c^2\}^{1/2} =$$

$$= q\cdot\{1 + p^2\cdot[2\cdot\alpha c + \alpha c^2]/q^2\}^{1/2}.$$

Indichiamo con θ l'angolo che l'elica, in ogni suo punto, forma con la generatrice del cilindro sul quale essa è tracciata, e poniamo (Fig.2):

(4) $$\cos\theta = p/q = \tau.$$

Indichiamo poi con β il coefficiente di allungamento dell'elica, in funzione dell'allungamento del cilindro, precisato dal coefficiente αc. Si avrà quindi:

(5) $$q' = q\cdot(1+\beta);$$

dalle (3), (4), applicando la formula dello sviluppo binomiale [si veda l'Appendice] si ottiene:

(6) $$\beta = \tau^2[2\cdot\alpha c + \alpha c^2]/2 - \{\tau^2\cdot[2\cdot\alpha c + \alpha c^2]\}^2/8.+..$$

$$= \alpha c\cdot\tau^2\cdot\{1-\tau^2/4\} + \alpha c^2\cdot\tau^2\cdot\{1-\tau^2\}/2 +...$$

APPENDICE - Ricordiamo qui la serie di Mac Laurin, detta "binomiale": essa vale per valori di x reale tali che sia $|x| < 1$, ed è data da:

(7) $$[1+x]^{\frac{1}{2}} = 1 +x/2 - x^2/8 + [3]$$

dove il simbolo [3] indica termini di grado non inferiore a 3 in x.

3 - Esempio di valutazione di ordini di grandezza (dati ricavati nell'incontro presso la "Proteos" del 29 nov, 1990).

Passo p :

(8) $$10 \text{ mm} < p < 50 \text{ mm}.$$

Raggio r :

(9) $$2.5 \text{ mm} < r < 12.5 \text{ mm}.$$

Coefficiente $\alpha(c)$:

(10) $$\alpha c \leq 19\cdot10^{-6}.$$

Coefficiente di allungamento massimo accettabile per il modulo ottico:

(11) $$\beta(max) < 0.36\cdot10^{-6}.$$

dal dati (9) si trae:

(12) $$15.7 \text{ mm} < a < 78.6 \text{ mm}$$

e di qui, e dalla (9):

(13) $10.22 \text{ mm} < q < 506.2 \text{ mm}$.

Dalla (13) e dalla (4):

(14) $0.03 < \tau < 0.776$,
e quindi:

(15) $\theta > 39$ gradi.
Sostituendo il dato αc ed il valore di τ nella (7) si ha :

(16) $\alpha c^2 \leq 361 \cdot 10^{-12} \leq 0.4 \cdot 10^{-9}$;

(17) $\alpha c \cdot \tau^2 \leq 11.6 \cdot 10^{-6}$.
Quindi SE si ritiene di poter trascurare i valori di ß non superiori a 10^{-8} , si può accettare:

(18) $\beta = 11.6 \cdot 10^{-6}$
come valore di allungamento dell'elica coi dati (8), (9), (10).

OSSERVAZIONE - I risultati debbono essere soggetti a revisione nel caso di variazione dei dati numerici. In particolare occorre valutare accuratamente la validità dell'ipotesi secondo la quale il modulo ottico è stato schematizzato con un filo.

4 - Problema B) - E' dato un modulo ottico, che qui è schematizzato con un cilindro circolare di raggio v. Sulla superficie del cilindro sono praticare delle cave ad andamento elicoidale,in ognuna delle quali è inserito un fascio di fibre ottiche, qui schematizzato con un filo. Si suppone che il modulo ottico si allunghi con un coefficiente ß che è dato dalla formula (6), e che può assumere per esempio il valore numerico dato dalla (18). Si vuole evitare che il fascio di fibre si allunghi, e perciò si provvede a che il fascio stesso, con l'allungarsi del modulo, vada a situarsi su un cilindro interno al primo, cilindro il cui raggio v' può essere espresso da :

(19) $v' = v \cdot (1-\mu)$.
Il numero μ può essere chiamato "tasso di accorciamento" del raggio del cilindro che schematizza il modulo ottico. Si vuole determinare il numero μ in modo da poter determinare la profondità della cava nella quale è inserito il fascio di fibre ottiche.

5 - Schematizzazione geometrica. Indichiamo qui con u il passo dell'elica su cui si distende il fascio di fibre ottiche, e sia:

(20) $$w = 2 \cdot \pi \cdot v$$

la lunghezza della circonferenza del cilindro che schematizza il modulo ottico.

Anche qui svilupperemo l'elica su un piano. La lunghezza s del tratto di elica compreso tra due punti appartenenti alla medesima generatrice del cilindro è ovviamente data dalla formula:

(21) $$s = \{u^2+w^2\}^{1/2}.$$

Indichiamo con s' la lunghezza del tratto di elica, quando il cilindro si è allungato con il coefficiente di allungamento ß e il raggio si è accorciato con il coefficiente di accorciamento μ. Si ha ovviamente:

(22) $$s' = \{u^2 \cdot (1+\beta)^2 + w^2 \cdot (1-\mu)^2\}^{1/2} =$$

$$= \{u^2+w^2+ 2 \cdot u^2 \cdot \beta - 2 \cdot w^2 \cdot \mu + u^2 \cdot \beta^2 + w^2 \cdot \mu^2 \}^{1/2}.$$

Indichiamo qui con δ l'angolo che l'elica forma con la generatrice del cilindro (Fig.3); si ha ovviamente:

(23) $$u/s = \cos\delta \qquad ; \qquad w/s = \sin\delta.$$

Con questa posizione la (22) può essere scritta nella forma seguente:

(24) $$s' = s \cdot \{1 + 2 \cdot \beta \cdot \cos^2\delta - 2 \cdot \mu \cdot \sin^2\delta + \beta^2 \cdot \cos^2\delta + \mu^2 \cdot \sin^2\delta \}^{1/2}.$$

Si vuole che sia :

(25) $$s' = s$$

perchè il fascio di fibre ottiche non si allunghi con l'allungarsi del modulo ottico. In prima approssimazione la condizione (25) può essere tradotta con la relazione:

(26) $$\beta \cdot \cos^2\delta = \mu \cdot \sin^2\delta.$$

OSSERVAZIONE - Come si è detto, la (26) è soltanto una relazione di prima approssimazione, ottenuta trascurando nella (24) il quarto e quinto addendo nell'interno della parentesi; ciò è lecito soltanto quando sia noto l'ordine di grandezza dei coefficienti ß e μ e si abbiano informazioni sull'angolo δ.

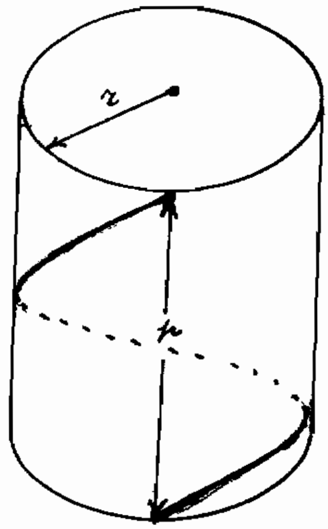


fig. 1

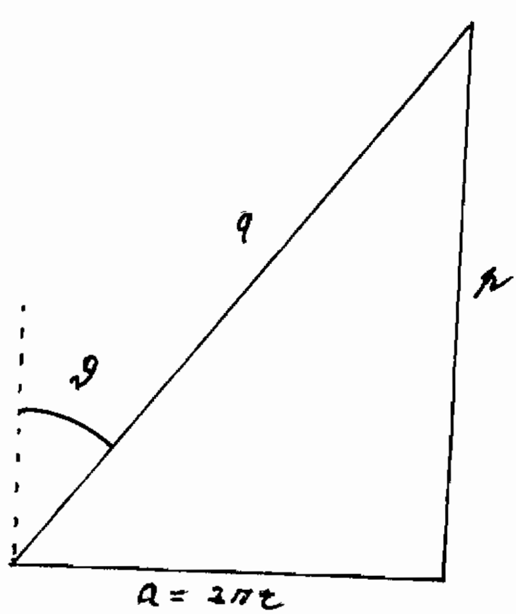


fig. 2

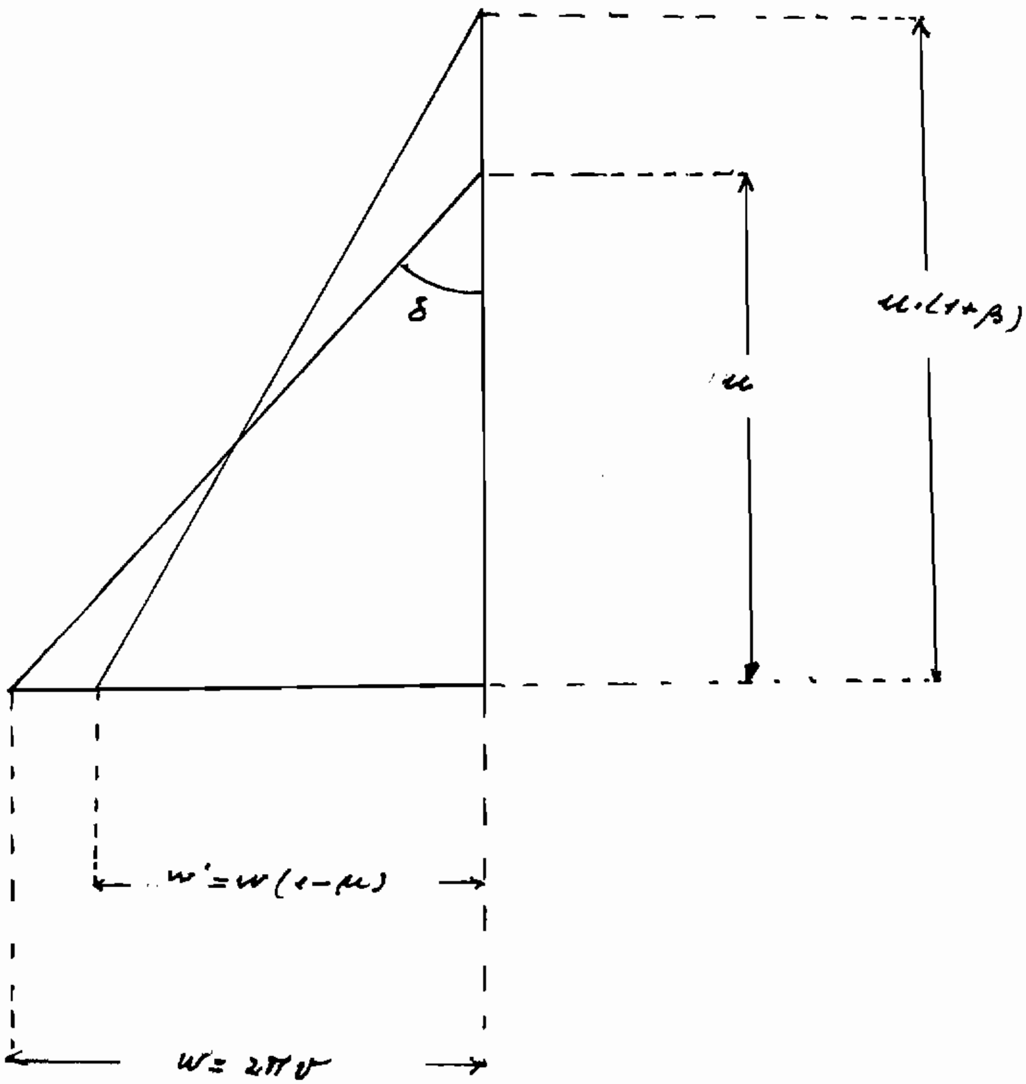


fig. 3

II IL CASO DEL CAVO PIEGATO.

1 - Premesse di Geometria.

AVVERTENZA - I) Le misure degli angoli sono supposte date in radianti. II) Lo spazio è riferito a coordinate ortogonali x, y, z. L'origine del riferimento sarà indicata con O.

Nel piano degli assi x,y è data un circonferenza di raggio R, avente il suo centro nel punto O, origine delle coordinate.

La circonferenza è rappresentata dalle equazioni parametriche:

(1) $$x = R \cdot \cos u \qquad z = R \cdot \sin u \qquad (0 \le u \le 2 \cdot \pi).$$

Il parametro u rappresenta l'angolo descritto dal raggio della circonferenza, a partire dall'asse delle x, in senso antiorario, rispetto ad un osservatore diretto come l'asse delle z (Fig 1). Indichiamo con C il punto della circonferenza, variabile con il parametro u; è noto che nel punto C sono definiti tre vettori unitari (versori), che vengono tradizionalmente chiamati "(versore) tangente", "(versore) normale", (versore) binormale", ed indicati abitualmente con i simboli **t**, **n** e **b**. Si suol dire che tali versori costituiscono un "riferimento locale", la cui origine è nel punto C; e la terna **t**, **n**, **b** si sceglie orientata in modo tale da essere direttamente congruente con la terna degli assi coordinati x, y, z. In particolare quindi l'angolo <**t**,**n**> vale $+\pi/2$ quando sia visto da un osservatore avente la direzione del versore **b**, e quindi dell'asse delle z.

Con queste convenzioni, le componenti dei tre versori rispetto agli assi coordinati x, y, z sono fornite dalla seguente Tabella:

TABELLA I

(2)

	x	y	z
t	-sinu	cosu	0
n	-cosu	-sinu	0
b	0	0	- 1

Si immagini ora una sfera di raggio r e di centro C, e supponiamo che sia valida la relazione:

(3) $$R > r.$$

Quando il punto C descrive la circonferenza (1), la sfera inviluppa una superficie chiamata "superficie torica" o semplicemente "toro"; si dimostra che tale superficie può pensarsi descritta dalla circonferenza avente centro in C, raggio r e giacente nel piano definito dai due versori n e b sopra definiti.

Indichiamo con Q un punto della circonferenza, ed adottiamo il simbolismo vettoriale abituale; allora il vettore Q-C potrà essere dato dalle formule:

(4) $$Q-C = r \cdot [n \cdot \cos v + b \cdot \sin v] \qquad (0 \le v \le 2 \cdot \pi).$$

Si ha quindi:

(5) $$Q-O = (Q-C) + (C-O),$$

e, tenendo presenti le (1), (2) ,(4) si ottengono le espressioni parametriche della superficie torica nella forma:

(6) $$\begin{aligned} x &= R \cdot \cos u - r \cdot \cos u \cos v \\ y &= R \cdot \sin u - r \cdot \sin u \cos v \qquad (0 \le u \le 2 \cdot \pi;\ 0 \le v \le 2 \cdot \pi) \\ z &= \qquad\qquad\quad r \cdot \sin v. \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 1 - Le (6) rappresentano una superficie algebrica del IV ordine la cui equazione cartesiana si può ottenere eliminando i due parametri u, v tra le tre equazioni (6), ed è:

(7) $$[x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2]^2 + 4 \cdot R^2 \cdot (z^2 - r^2) = 0.$$

Questa superficie non è sviluppabile sul piano. Pertanto i calcoli relativi non possono essere eseguiti come si è fatto nel Cap. I, in relazione al cilindro circolare retto.

Come è noto, si chiama "metrica" di una superficie la parte principale del modulo del vettore infinitesimo dQ, calcolato in base alle (1), (2), (4). Si pone di solito:

(8) $$ds^2 = |dQ|^2,$$

ed eseguendo i calcoli in forza delle (6) si ottiene:

(9) $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = r^2 \cdot dv^2 + (R - r \cdot \cos v)^2 \cdot du^2.$$

2 - Si suol chiamare "elica torica" la curva, tracciata sulla superficie, che si ottiene dalle (6) ponendo

(6) $$u = k \cdot v \qquad (k \text{ costante})$$

cioè facendo ruotare il piano dei versori n, b attorno all'asse delle z di un angolo u proporzionale all'angolo di cui ruota il vettore (Q-C) (raggio del cerchio piccolo).

OSSERVAZIONE 2 - Se il numero k è razionale la curva si chiude su se stessa dopo un numero finito di giri del piano attorno all'asse delle z; se k non è razionale la curva non si chiude, ed anzi "riempie" tutta la superficie; questa espressione significa che, dato un punto P della superficie ed un numero δ, la curva passa ad una distanza minore di δ da P , per un valore abbastanza grande di v.

Per

(10) $$0 \le v \le 2\cdot\pi$$

l'andamento della curva è indicato qualitativamente dalla Fig.2 (nella quale i tratti "a puntini" rappresentano parti della curva che sono sotto il piano z=0; in particolare il punto B ha ovviamente coordinata z che è negativa).

Prendiamo ora in considerazione un arco della curva corrispondente ai valori di u soddisfacenti alle limitazioni (10); distingueremo due parti di quest'arco: una parte verrà chiamata anche convenzionalmente "arco esterno" o anche "arco dorsale", ed è costituita dai punti per i quali si ha

(11) $$\pi/2 \le v \le 3\cdot\pi/2$$

L'altra parte verrà chiamata anche convenzionalmente "arco interno" o anche "arco ventrale", ed è costituita dai punti per i quali valgono le limitazioni:

(12) $$0 \le v \le \pi/2 \quad \text{oppure} \quad 3\cdot\pi/2 \le v \le 2\cdot\pi.$$

Per gli scopi dei calcoli numerici poniamo qui:

(13) $$v = \pi/2 + \tau.$$

Si ha di qui:

(14) $$dv = d\tau$$

ed anche:

(15) $$-\cos v = \sin\tau.$$

Conseguentemente i valori di τ che corrispondono a punti dell'arco esterno (o arco dorsale) soddisfano alle relazioni:

(16) $$0 \le \tau \le \pi,$$

ed i valori di τ che corrispondono a punti dell'arco interno (o arco ventrale) soddisfano alle relazioni:

(17) $$\pi \le \tau \le 2\cdot\pi.$$

Poniamo:

(18) $$w = r/R;$$

dalle (9) ,(13), (14), (15) si trae che l'elemento d'arco della curva è dato da:

(19) $$ds = R\cdot\{[w^2 + k^2\cdot(1+w\cdot\sin\tau)^2]^{1/2}\}\cdot d\tau;$$

ponendo:

(20) $$f(\tau) = [w^2 + k^2\cdot(1+w\cdot\sin\tau)^2]^{1/2}.$$

Indichiamo qui con A e B gli estremi dell'arco corrispondente ai valori di τ soddisfacenti alle limitazioni (16), arco che abbiamo chiamato "dorsale"; la sua lunghezza vale:

(21) $$L_1 = R\cdot\int_0^{\pi} f(\tau)\cdot d\tau$$

e quella dell'arco che abbiamo chiamato "arco interno" o "arco ventrale", è data da :

(22) $$L_2 = R\cdot\int_{\pi}^{2\cdot\pi} f(\tau)\,d\tau$$

Dalle note proprietà della funzione $\sin\tau$ si ha immediatamente :

(23) $$L_1 > L_2.$$

OSSERVAZIONE 3 - E' noto che l'integrale indefinito:

(24) $$\int f(\tau)\cdot d\tau$$

non è esprimibile con funzioni elementari (razionali, radicali, funzioni trigonometriche, esponenziale, logaritmo). Esso è esprimibile con certe funzioni trascedenti, definite nel campo complesso, che vengono chiamate "funzioni ellittiche"; ma l'impiego delle tavole esistenti di queste funzioni richiederebbe calcoli laboriosi di riduzione della funzione $f(\tau)$ alle forme canoniche, a cui si riferiscono le tavole numeriche nominate sopra. Tali trasformazioni introdurrebbero nei calcoli degli errori inevitabili e difficilmente valutabili. Pertanto è ragionevole pensare che il confronto tra L1 ed L2 possa essere eseguito in forma più comoda e precisa con il calcolo numerico diretto degli integrali definiti (21) e (22), in presenza di dati valori numerici dei parametri R, w e k.

3 - Gli sviluppi precedenti possono essere applicati al caso di un cavo misto, che viene piegato ad arco di circonferenza, rimanendo in un medesimo piano. Supponiamo che il cavo possa essere schematizzato con un cilindro circolare di raggio r e che il modulo ottico possa essere schematizzato con un filo avvolto ad elica sul cilindro, come è stato fatto nel paragrafo 2 del Cap. I. Immaginiamo di avvolgere il cavo su un tamburo di raggio R0, e supponiamo che la forma assunta dal cavo dopo la piegatura possa essere rappresentata con sufficiente approssimazione da una parte di superficie torica.

Indichiamo con R la distanza dell'asse del cavo dall'asse del tamburo sul quale esso è avvolto.

Indichiamo qui con il simbolo τ_0 l'angolo AOC , e poniamo, in prima approssimazione:

(25) $$p = R\cdot\tau_0.$$

Pertanto, quando τ varia da 0 a $2\cdot\pi$, v varia da 0 a p/R, e si ha dunque, nelle ipotesi ammesse,:

(26) $$\tau = v\cdot p/2\cdot\pi\cdot R,$$

ossia, nella formula (20) si ha :

(17) $$k = p/2\cdot\pi\cdot R.$$

```
10 REM' CALCOLO DI INTEGRALI. NOME CAVI2
20 DEFDBL A,B,C,K,W
30 INPUT "N=";N ' NUMERO DEI PASSI DI INTEGRAZIONE
40 INPUT "P=";P' PASSO ELICA
50 INPUT "RM=";RM'RAGGIO DI SEZIONE DEL MODULO OTTICO
60 INPUT "R=";R ' RAGGIO DI PIEGAMENTO
70 W=RM/R' RAPPORTO DEI DUE RAGGI
80 A = 4*ATN(1) ' PIGRECO
90 B = A/N' PASSO ELEMENTARE DI INTEGRAZIONE
100 K=P/(2*A*R)
110 Y=0'CALCOLO DEL SEMIARCO ALLUNGATO
120 X=0
130 FOR I=1 TO N
140 X=X+B
150 S=SIN(X)
160 GOSUB 470
170 T=T+Y
180 NEXT
190 U=0'CALCOLO DEL SEMIARCO ACCORCIATO
200 X=A
210 FOR I=1 TO N
220 X = X+B
230 S = SIN(X)
240 GOSUB 470
250 U=U+Y
260 NEXT
270 Z = (2*A*RM)^2+ P^2
280 Q =SQR(Z)' LUNGHEZZA ORIGINALE, A CAVO DIRITTO
290 L=(2*R*T*B)/Q -1 ' COEFFICIENTE DI ALLUNGAMENTO
300 M= 1-(2*R*U*B)/Q' COEFFICIENTE DI ACCORCIAMENTO
310 S=1
320 GOSUB 470
330 D=Y*8*(ATN(1))*R/Q-1' MAX COEFFICIENTE DI ALLUNGAMENTO LOCALE
340 S=-1
350 GOSUB 470
360 G=1-Y*8*(ATN(1))*R/Q 'MAX COEFFICIENTE DI ACCORCIAMENTO LOCALE
370 PRINT "N="N,"P="P,"RM="RM,"R="R
380 PRINT "W="W, "K="K
390 PRINT "Q/2="Q/2 "SEMIARCO A CAVO DRITTO"
400 PRINT "R*T*B="R*T*B "SEMIARCO DORSALE ALLUNGATO"
410 PRINT "R*U*B="R*U*B "SEMIARCO VENTRALE ACCORCIATO"
420 PRINT "L="L"COEFFICIENTE DI ALLUNGAMENTO"
430 PRINT "M="M "COEFFICIENTE DI ACCORCIAMENTO"
440 PRINT "D="D"MAX COEFFICIENTE DI ALLUNGAMENTO LOCALE"
450 PRINT "G="G"MAX COEFFICIENTE DI ACCORCIAMENTO LOCALE
460 END
470 C=W^2 +(K*(1+W*S))^2
480 Y=SQR(C)
490 RETURN
```

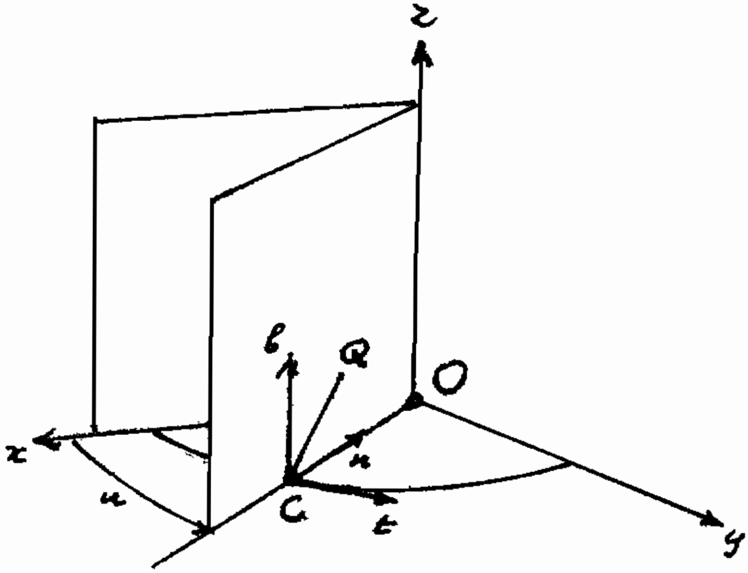


fig. 1

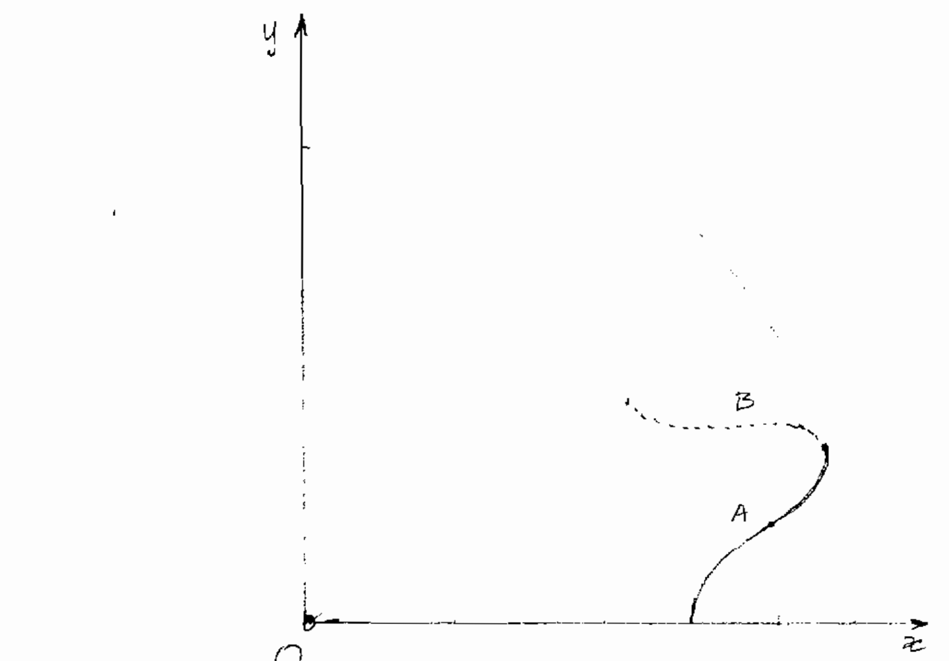


fig. 2

casi / due

III IL CASO DEL CAVO AVVOLTO AD ELICA.

1 Premesse geometriche.

AVVERTENZE I) Le misure degli angoli sono supposte date in radianti.
II) Lo spazio è riferito a coordinate cartesiane ortogonali x, y, z. L'origine delle coordinate è indicata con O.

Si consideri un'elica circolare, tracciata su un cilindro (circolare retto), di raggio R; sia p il passo dell'elica. Supponiano che il cilindro abbia come asse l'asse delle z del riferimento; indichiamo con C il punto che descrive l'elica, ed indichiamo con u l'angolo formato dal piano degli assi x,y con il piano per l'asse z che contiene il punto C.

Rappresentiamo l'elica con le equazioni parametriche (in funzione di u):

$$x = R \cdot \cos u$$
$$y = R \cdot \sin u \qquad (h>0 \;;\; h \text{ costante}) \qquad (1)$$
$$z = h \cdot u$$

Indichiamo con il simbolo $d\sigma$ l'elemento d'arco della curva descritta dalle (1), definito dall'equazione:

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (R^2 + h^2) \cdot du^2. \qquad (2)$$

Nel seguito indicheremo le derivate delle funzioni (1) rispetto alla variabile σ, definita dalla (2), apponendo un apice ai simboli della variabili stesse; così, per esempio, il simbolo "x'" indicherà la derivata rispetto a σ della prima delle funzioni (1).

Ponendo:

$$g^2 = R^2 + h^2 \qquad (3)$$

si ha ovviamente:

$$d\sigma = g \cdot du. \qquad (3a)$$

Con queste posizioni si ha immediatamente che il passo p dell'elica è legato alla costante h, che figura nelle (1), dalla relazione:

$$p = 2 \cdot \pi \cdot h, \qquad (4)$$

e la lunghezza a dell'arco di elica corrispondente ad un passo della curva è:

$$a = 2 \cdot \pi \cdot g. \qquad (5)$$

Alla curva descritta da C, e rappresentata dalle (1), sono associati tre vettori unitari (versori), mutuamente ortogonali, che sono chiamati, tradizionalmente "(versore) tangente, (versore) normale , (versore) binormale", e sono indicati abitualmente con i simboli :"**t**, **n**, **b**".

Si suole anche dire che i tre versori costituiscono la "terna intrinseca", ovvero anche il "riferimento locale", relativo al punto variabile C, che descrive l'elica rappresentata dalle (1).

Il versore tangente determina la direzione ed il verso (al crescere di u) della retta tangente alla curva in C; il versore normale determina, insieme con il versore tangente, un piano, che viene chiamato "piano osculatore"; infine il versore binormale è normale ad entrambi i versori precedenti, e costituisce con essi una terna ortogonale di riferimento, che è direttamente congruente alla terna degli assi cartesiani x, y, z.

Le componenti dei versori della terna intrinseca rispetto agli assi ortogonali cartesiani x, y, z sono fornite dalla seguente tabella I:

TABELLA I .(Componenti dei versori della terna intrinseca rispetto agli assi coordinati)

	x	y	z
t	$-R\cdot\sin u/g$	$R\cdot\cos u/g$	h/g
n	$-\cos u$	$-\sin u$	0
b	$h\cdot\sin u/g$	$-h\cdot\cos u/g$	R/g

2 - Tra i versori della terna intinseca e quelli che si ottengono per derivazione sussistono certe relazioni, che sono immediate conseguenze delle note formule di Frenet, e che sono date dalla seguente

TABELLA II :

$$(6)\qquad \begin{cases} d\mathbf{t} & & \mathbf{n}\cdot(R/g)\cdot du & \\ d\mathbf{n} = & -\mathbf{t}\cdot(R/g)\cdot du & & \mathbf{b}\cdot(h/g)\cdot du \\ d\mathbf{b} = & & -\mathbf{n}\cdot(h/g)\cdot du & . \end{cases}$$

Come è noto, esistono due funzioni del punto della curva, abitualmente indicate con i simbboli c e T, che vengono chiamate rispettivamente "prima curvatura (o anche flessione)" e "seconda curvatura (o anche torsione)" della curva stessa.

Nel caso dell'elica cilindrica, definita dalle (1), c e T sono costanti, e valgono rispettivamente:

$$(7)\qquad c = R/g^2 \quad ; \quad T = -h/g^2.$$

OSSERVAZIONE 1 - E' noto che la prima curvatura è definita soltanto in valore assoluto; essa quindi è assunta sempre come positiva. Invece per la torsione si può definire anche un segno; come si vede dalle (7), tale segno è determinato dal valore di h nelle (1) e dalla orientazione della terna intrinseca. La distinzione tra i due possibili segni della torsione dell'elica corrisponde, come è noto, alla distinzione tra elica destrorsa (levogira) ed elica sinistrorsa (destrogira), o anche tra vite destra e vite sinistra.

3 - Immaginiamo ora una superficie sferica di raggio r, che abbia il suo centro nel punto C dell'elica; supporremo che il raggio r della sfera sia costante e soddisfi alla condizione:

(8) $$r < R.$$

Al variare di C sull'elica, la superficie sferica inviluppa una superficie ("superficie tubolare" o anche "superficie canale"), che viene chiamata "Serpentino" [Cfr. Gino Fano - Lezioni di Geometria descrittiva date nel R. Politecnico di Torino - Torino(Paravia), 1914. Cap. XIII,N.411].

Si dimostra che questa superficie si può anche pensare descritta dalla circonferenza di raggio r che ha il suo centro in C e che giace nel piano dei due versori n e b, quando il centro C descrive l'elica cilindrica studiata nei paragrafi precedenti.

Per rappresentare questa circonferenza adotteremo anche qui le convenzioni abituali del calcolo vettoriale; pertanto, indicato con Q un punto della circonferenza, il vettore (Q-C), nel piano definito dai due versori n e b sopra nominati, è dato da:

(9) $$Q-C = r\cdot\{\mathbf{n}\cdot\cos v + \mathbf{b}\cdot\sin v\}.$$

OSSERVAZIONE 2 - Il parametro v ha il significato dell'angolo che il vettore Q-C forma con il versore n. Si noti che la coppia di versori n, b è vista orientata come la coppia di assi cartesiani x,y da un osservatore che è diretto come il versore tangente t.

In base alla (9) ed alle formule della Tab.I si possono calcolare le coordinate del punto Q della superficie del serpentino in funzione dei due parametri u,v. Si ottengono così le formule:

(10) $$\begin{aligned} x &= \cos u\cdot[R-r\cdot\cos v] + r\cdot h\cdot\sin u\cdot\sin v/g \\ y &= \sin u\cdot[R-r\cdot\cos v] - r\cdot h\cdot\cos u\cdot\sin v/g \\ z &= h\cdot u + R\cdot r\cdot\sin v/g. \end{aligned}$$

La superficie rappresentata dalle (10) non può essere rappresentata con una unica equazione algebrica che lega le tre coordinate di un suo punto e non può essere sviluppata su di un piano. E' possibile tuttavia determinare la metrica della superficie in funzione dei differenziali du e dv dei due parametri. A tale scopo giungeremo utilizzando il riferimento intrinseco, che è stato introdotto nel paragrafo 1, e che è collegato al punto C che descrive l'elica (1).

Sempre adottando le notazioni vettoriali, si ha:

$$Q-O = (C-O) + (Q-C)$$

e quindi:

(11) $$dQ = dC + d(Q-C).$$

Ora si ha:

(12) $$dC = \mathbf{t}\cdot g\cdot du$$

e dalla (9):

$$(13) \qquad d(Q-C) = r\cdot[d\mathbf{n}\cdot\cos v + d\mathbf{b}\cdot\sin v] + r\cdot[-\mathbf{n}\cdot\sin v + \mathbf{b}\cdot\cos v]\cdot dv.$$

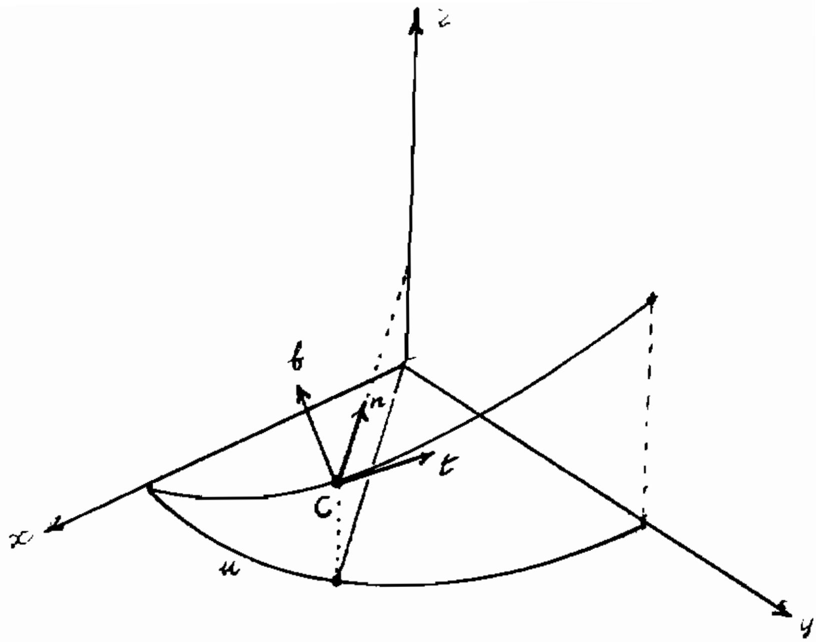
Tenendo conto della (3a), delle (6) e delle (11) si ottiene in definitiva:

$$(14) \qquad dQ = \mathbf{t}\cdot[g-R\cdot r\cdot\cos v/g]\cdot du + \mathbf{n}\cdot[(-r\cdot h\cdot\sin v/g)\cdot du - r\cdot\sin v\cdot dv] + \\ +\mathbf{b}\cdot[(r\cdot h\cdot\cos v/g)\cdot du + r\cdot\cos v\cdot dv].$$

Il numero $|dQ|^2$ fornisce ovviamente il quadrato della distanza tra due punti infinitamente vicini della superficie, cioè la metrica della superficie stessa. Poiché i tre versori **t**, **n**, **b** sono mutuamente ortogonali, per il calcolo del quadrato del modulo di dQ si può applicare alla (14) il Teorema di Pitagora nello spazio.

Si ottiene quindi:

$$(15) \qquad ds^2 = \{[g-R\cdot r\cdot\cos v/g]+r^2\cdot h^2/g^2\}\cdot du^2 + 2\cdot(r^2\cdot h/g)\cdot du\cdot dv + r^2\cdot dv^2.$$



cavi/tie